Ecuaciones lineales

Objetivos: Al terminar esta lección podrás definir lo que es una ecuación lineal y podrás resolver ecuaciones lineales.

Una ***ecuación*** es un enunciado que declara la igualdad de dos expresiones. Escribimos una ecuación poniendo el signo de igualdad, “=”, entre las dos expresiones.

Ejemplos

1) $5 = 3 + 2$
2) $1 = 2$
3) $3x + 1 = 7$
4) $x = x + 1$
5) $2(3x +1) - 4 = 6x - 2$

Una ecuación puede ser siempre falsa, como los ejemplos 2 y 4 de arriba; puede ser siempre cierta como los ejemplos 1 y 5; o puede ser cierta para algún(os) valores de las desconocidas y falso para otros, como el ejemplo 3. El ejemplo 3 muestra una ecuación que es cierta si $x = 2$, pero es falsa para cualquier otro valor de x.

Las ecuaciones que son ciertas para todos los valores legítimos de las variables son llamadas ***identidades***. Un valor legítimo es uno para el cual los dos lados de la ecuación están definidos. Las ecuaciones que son falsas para todos los valores legítimos de las variables son llamadas ***contradicciones***. Una ecuación que es cierta para algunos valores de la(s) variable(s) y falsa para otros valores es llamada una ***ecuación condicional***.

Ejemplos:

6) $\dfrac{2}{x-1} = \dfrac{2x-6}{x^2-4x+3}$ es una identidad porque para todo valor de x para los que los dos lados de la ecuación estén definidos, la ecuación es cierta. Por ejemplo, si $x = -4$, la ecuación se convierte en $\dfrac{2}{-5} = \dfrac{-14}{35}$, lo cual es cierto. Similarmente ocurre con cualquier otro valor de x que no sea 1 ni 3, (1 y 3 implican división por 0).

7) $\dfrac{5}{2x-1} = 3x-8$ es una ecuación condicional pues se satisface sólo para $x = 3$ y para $x = 1/6$.

8) $3x-9 = 3x+1$ es una contradicción porque no existen valores de x para los que la ecuación se haga cierta.

Nos interesa determinar los valores que hacen cierta a una ecuación condicional. Para determinar estos valores nos valdremos de algunas propiedades de las ecuaciones.

Lección 5 - Ecuaciones lineales

Para cualesquiera números reales *a, b,* y *c* , las siguientes propiedades son válidas:

1) Si $a = b$, entonces $b = a$.
2) Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.
3) Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.
4) Si $a = b$ y $c \neq 0$, entonces $a \bullet c = b \bullet c$, y además $a/c = b/c$.

Cuando cambiamos una ecuación mediante la aplicación de una de estas propiedades, la ecuación resultante se dice *equivalente* y tiene las mismas soluciones que la ecuación original. Nuestro objetivo es transformar la ecuación hasta obtener una ecuación equivalente de la forma $x = a$, cuya solución es, obviamente, a. Al proceso de hallar la(s) solución(es) de una ecuación le llamamos *resolver la ecuación*. Una clase de ecuaciones que frecuentemente necesitamos resolver está formada por las ecuaciones lineales. Una *ecuación lineal* es una en la que las variables que aparecen no están elevadas a ninguna otra potencia que no sea la primera potencia. Una ecuación lineal en una variable es una ecuación que puede escribirse en la forma $ax + b = c$.

Ejemplos de ecuaciones lineales:

9) $12x - 7 = 23$

Si aplicamos la propiedad 3 con $c = 7$, obtenemos

$12x - 7 + 7 = 23 + 7$

que al simplificarse nos da

$12x = 30$

La aplicación de la propiedad 4 con $c = 1/12$, produce

$$12x \cdot \frac{1}{12} = 30 \cdot \frac{1}{12}$$

que al simplificar se convierte en

$$x = \frac{30}{12} = \frac{5 \cdot 6}{2 \cdot 6} = \frac{5}{2}$$

Por lo tanto la solución a la ecuación es $\frac{5}{2}$.

10) $4y + 9 = 13 - 2(y + 3)$

Es equivalente a $4y + 9 = 13 - 2y - 6$ (aplicando la propiedad distributiva)

$\Leftrightarrow 4y + 9 = 7 - 2y$ (asociando 13 y -6)

$\Leftrightarrow 4y + 9 + 2y = 7 - 2y + 2y$ (propiedad 3 con $c = 2y$)

$\Leftrightarrow 6y + 9 = 7$ (asociando 4y y 2y en el lado izquierdo, -2y y 2y en el derecho)

$\Leftrightarrow 6y + 9 - 9 = 7 - 9$ (propiedad 3 con c = -9

$\Leftrightarrow 6y = -2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{6} \cdot 6y = \frac{1}{6} \cdot (-2)$ (propiedad 4 con $c = 1/6$)

$\Leftrightarrow y = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$. Por lo tanto la solución es -1/3.

Note que hemos usado $\Leftrightarrow$ delante de una ecuación para indicar que es equivalente a la ecuación previa. Podemos abreviar un poco el proceso si notamos que cuando queremos eliminar el término c de un lado de la ecuación, podemos simplemente añadir el término opuesto de c en el otro lado de la ecuación y anular a c en el lado en que estaba originalmente.

Ejemplo

11) $\frac{2}{3}x-4=\frac{5}{7}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x=\frac{5}{7}+4$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x=\frac{5+4\cdot 7}{7}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}x=\frac{3}{2}\cdot\frac{33}{7}$

$\Leftrightarrow x=\frac{99}{14}$

Para resolver ecuaciones, podemos proceder de la siguiente manera:

1ro: Expandir para deshacernos de los paréntesis, si los hubiera .

2do: Juntar todos los términos numéricos en un lado de la ecuación y todos los términos con variables en el lado opuesto.

3ro: Consolidar todos los términos semejantes para obtener una ecuación con un sólo término en cada lado.

4to: Multiplicar o dividir por una cantidad conveniente en ambos lados para que quede la variable sola.

Ejemplos:

12) $2x+3=x-4(5-x)+1$

$\Leftrightarrow 2x+3=x-20+4x+1$

$\Leftrightarrow 2x-x-4x=-20+1-3$

$\Leftrightarrow -3x=-22$

$\Leftrightarrow \frac{-3x}{-3}=\frac{-22}{-3}$

$\Leftrightarrow x=\frac{22}{3}$

13) $\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)+8=\frac{1}{5}-2(3x+10)$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x-\frac{1}{3}+8=\frac{1}{5}-6x-20$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x+6x=\frac{1}{5}-20+\frac{1}{3}-8$

$\Leftrightarrow \frac{2+18}{3}x=\frac{3-300+5-120}{15}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{20}\cdot\frac{20}{3}x=\frac{3}{20}\cdot\frac{-412}{15}$

$\Leftrightarrow x=\frac{-412}{100}=\frac{-103}{25}$

14) $\Leftrightarrow \frac{x}{4}+\frac{5}{3}=8-\frac{x}{6}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{4}+\frac{x}{6}=8-\frac{5}{3}$

$\Leftrightarrow 12\cdot\left(\frac{x}{4}+\frac{x}{6}\right)=12\cdot\left(8-\frac{5}{3}\right)$:note que 12 es el menor denominador común de todos los denominadores.

$\Leftrightarrow 3x+2x=96-20$

$\Leftrightarrow 5x=76$

$\Leftrightarrow x=\frac{76}{5}$

Ejercicios:

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1) $7x+5=26$

2) $9-2x=5x-19$

3) $\frac{1}{2}x+5=10-\frac{1}{3}x$

4) $\frac{3}{5}\left(\frac{x}{5}-\frac{7}{4}\right)+2=\frac{7x}{10}+11$

Respuestas

Podemos usar ecuaciones lineales para resolver algunos problemas relacionados con operaciones financieras.

Ejemplos

15) El precio de venta de una silla refleja una ganancia de 40% sobre su costo. Si el precio de venta es \$85, ¿cuál es el costo de la silla?

Solución: Si denotamos con *x* al costo de la silla, entonces 85= x+.40x. Resolviendo esta ecuación para *x*, obtenemos: $85=1.40x \Rightarrow \frac{85}{1.40}=x \Rightarrow x\approx 60.71$. Por lo tanto el costo de la silla es de \$60.71.

16) En el país de Tributolandia, para un nivel de ingresos tributables mayor de \$40,000, la responsabilidad contributiva es de \$10,000 más el 45% del exceso de \$40,000. Si la ciudadana María pagará \$13,000 como tributo por sus ingresos, ¿cuánto fue el ingreso tributable de María?

Solución: Si I denota el ingreso tributable de María, el exceso de \$40,000 puede representarse con (I-40,000). El 45% de eso es 0.45(I-40,000). Ahora podemos formar la ecuación 13,000 = 10,000 + 0.45(I-40,000). Resolviendo esta ecuación para I, obtenemos 3,000 = 0.45I -0.45(40,000)

$$\Rightarrow \quad 3{,}000 + 0.45(40{,}000) = 0.45I$$

$$\Rightarrow \quad 3{,}000 + 18{,}000 = 0.45I$$

$$\Rightarrow \quad 21{,}000/0.45 = I$$

$$\Rightarrow \quad 46666.67 \approx \mathbf{I}$$

El ingreso tributable de María fue \$46,666.67.

El texto no tiene ejercicios que correspondan a esta lección.